Лекция 7. Теорема Шеннона –Котельникова. Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром.

Рассмотрим характеристическую функцию отрезка $[a,b]$:

$$\chi[a,b] = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Построим ее преобразование Фурье:

$$\hat{\chi}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{i\xi x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\xi x} - e^{i\xi x}}{i\xi} = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\xi x)}{\xi x} \to 0, \text{ при } \quad |\xi| \to \infty.$$

Оказалось, что преобразование Фурье функции с компактным носителем является достаточно медленно убывающей на бесконечности функцией.

Функции, у которых преобразование Фурье имеет компактный носитель, образуют пространство функций с ограниченной шириной полосы, т.е.
$\operatorname{supp}\left(\hat{f}(\xi)\right) \subset [-\Omega, +\Omega], 0 < \Omega < \infty.$

Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром.

Пусть функция f(x) есть функция с ограниченной шириной полосы. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-i\xi y)dy\exp(i\xi x)d\xi =$$

меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\xi(x-y)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin\Omega(x-y)}{\Omega(x-y)}dy = f * Sinc(\Omega x)$$

Вывод: значения функции с огр. Шир. Пол. Могут быть рассчитаны как скалярное произведение $f(x)=<f,e_x>$, где

$$e_x(y) = \sin\Omega(x-y)/\Omega(x-y)\ ,$$

или как непрерывный линейный функционал, т.е. отображение $f \to f(x)$ непрерывно.

Класс таких функций называется **гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.**

Определение. Если $\exists K(x,y): f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y) dy$ в $L_2(R)$,

то такое множество функций называется гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $K(x,y)$.